Integralele lui Euler

2.6.1 Definit ¸iilor Beta ¸si Gama¸iile funct

Definit

¸ia 1 *Integrala depinzˆand de parametrii p ¸si q,*

*B*(*p.q*) =

Z 1 0

*xp−*1(1 *− x*)*q−*1*dx,* (2.119)

*se nume¸ste* integrala Euler de primul tip *sau* funct¸ia Beta*.* Definit *and de parametrul p,* ¸ia 2 *Integrala improprie depinzˆ*

Γ(*p*) =

Z +*∞* 0

*xp−*1*e− xdx,* (2.120)

*se nume¸ste* integrala Euler de tipul al doilea *sau* funct¸ia Gama*.*

Funct¸iile (2*.*119) ¸si (2*.*120) joac˘a un rol important ˆın diferite domenii ale matematicii ¸si ale matematicii fizice. Dup˘a cum se va ar˘ata, funct¸ia Beta se exprim˘a ˆın funct¸ie de funct¸ia Gama ¸si din acest motiv vom prezenta mai ˆıntˆai propriet˘at¸ile funct¸iei Gama.

2.6.2 Propriet˘at¸i ale funct¸iei Gama

Teorema *Integrala improprie* (2*.*120) *este convergent˘*

*a pentru* 0 *< p <*

+*∞, divergent˘*

*a pentru p ≤* 0 *¸si uniform convergent˘a ˆın raport cu parametrul p pe orice compact* [*p*0*, P*]*, unde* 0 *< p*0 *< P <* +*∞.*

Demonstrat¸ie. Dac˘a *p −* 1 *<* 0*,* integrandul din (2*.*120) are un punct singular ˆın limita inferioar˘a. S˘a desp˘art¸im intervalul de integrare ˆın dou˘a subintervale, de exemplu [0*,* 1] ¸si [1*,* +*∞*)*,* prin intermediul punctului *x* = 1*.* Avem

Z +*∞* 0

*xp−*1*e− xdx* =

Z 1 0

*xp−*1*e− xdx* +

Z +*∞* 1

*xp−*1*e− xdx.* (2.121)

Primul termen din membrul doi al egalit˘at¸ii (2*.*121) este o integral˘a im proprie de spet¸a a doua dac˘a *p −* 1 *<* 0*,* cu punctul singular ˆın limita infe

rioar˘a. Scriind aceast˘a integral˘a ˆın forma

Z 1 0

*e− x*

*x*1*−pdx* ¸si aplicˆand criteriul de

comparat¸ie ˆın *α,* formularea cu limit˘a, deducem c˘a integrala este convergent˘a dac˘a 1 *− p <* 1*,* adic˘a dac˘a *p >* 0*,* ¸si divergent˘a dac˘a *p ≤* 0*.* Cel de al doilea termen din membrul al doiea al egalit˘at¸ii (2*.*121) este o integral˘a improprie de spet¸a ˆıntˆai convergent˘a pentru toate valorile reale ale lui *p.* ˆIntr-adev˘ar, pentru a ar˘ata aceasta s˘a remarc˘am c˘a egalit˘at¸ile

lim *x→*+*∞x*2*f*(*x*) = lim *x→*+*∞x*2*xp−*1*e− x* = lim *x→*+*∞xp*+1

*ex*= (*p* + 1) lim *x→*+*∞xp*+1

*ex*= 0

sunt satisf˘acute pentru orice *p ∈ IR.*

ˆIn consecint¸˘a, integrala improprie Z +*∞* 0

tru orice *p >* 0 ¸si divergent˘a pentru *p ≤* 0*.*

*xp−*1*e− xdx* este convergent˘a pen

S˘a demonstr˘am c˘a integrala improprie (2*.*120) este uniform convergent˘a ˆın raport cu parametrul *p* pe orice interval finit [*p*0*, P*0]*,* unde 0 *< p*0 *≤ P*0 *<* +*∞.* Ca ¸si ˆın cazul convergent¸ei obi¸snuite a acestei integrale, scriem [0*,* +*∞*) = [0*,* 1] *∪* [1*,* +*∞*) ¸si studiem convergent¸a uniform˘a ˆın raport cu parametrul *p* a integralelor improprii

Z 1 0

*xp−*1*e− xdx* ¸si

Z +*∞* 1

*xp−*1*e− xdx.*

Cˆand *p ≥ p*0 *>* 0 ¸si *x ∈* [0*,* 1]*,* funct¸ia de integrat satisface inegalitatea

*xp−*1*e− x ≤ xp*0*−*1*,* iar integrala are valoarea 1*/p*0*.*

Z 1 0

*xp*0*−*1*dx* este convergent˘a dac˘a *p*0 *>* 0 ¸si

Conform criteriului lui Weierstrass de convergent¸˘a a integralelor improprii

depinzˆand de un parametru, rezult˘a c˘a integrala

Z 1 0

*xp−*1*e− xdx* este uniform

convergent˘a ˆın raport cu parametrul *p* pe intervalul [*p*0*,* +*∞*)*,* unde *p*0 *>* 0*.*

Evaluˆand integrala observ˘a c˘aZ *λ*

Z *λ* 0

*xp−*1*e− xdx* pentru *p →* 0 + 0 ¸si *λ* = const*>* 0 se

*xp−*1*e− xdx ≥ e−*1 0

Z *λ* 0

*xp−*1*dx* =*λp*

*pe→* +*∞*

¸si, ˆın consecint¸˘a, putem afirma c˘a integrala

Z 1 0

*xp−*1*e− xdx* nu este uniform

convergent˘a ˆın raport cu parametrul *p* pe intervalul (0*,* +*∞*)*.*

Tot datorit˘a criteriului lui Weierstrass rezult˘a c˘a integrala improprie de

spet¸a ˆıntˆai

Z +*∞* 1

*xp−*1*e− xdx* este uniform convergent˘a ˆın raport cu parametrul

*p* pe orice interval de forma (*−∞, P*0]*,* unde *P*0 *<* +*∞,* deoarece *xp−*1*e− x ≤ xP*0*−*1*e− x* pentru 1 *≤ x <* +*∞, −∞ < p ≤ P*0

¸si integrala

Z +*∞* 1

*xP*0*−*1*e− xdx* este convergent˘a. Z +*∞*

Integrala improprie 1

*xp−*1*e− xdx* nu converge uniform ˆın raport cu

parametrul *p* pe intervalul (*−∞,* +*∞*)*.* Pentru a justifica aceast˘a afirmat¸ie,

evalu˘am integrala

Z +*∞ `*

*xp−*1*e− xdx* pentru *` >* 1 arbitrar, dar fixat ¸si pentru

valori mari ale lui *p,* deci pentru *p →* +*∞.* Pentru orice num˘ar ˆıntreg *N >* 0 g˘asim valori ale lui *p* astfel ˆıncˆat *p−*1 *> N,* deoarece *p →* +*∞.* Prin urmare, pentru astfel de *p* se poate scrie

Z +*∞ `*

*xp−*1*e− xdx >*

Z +*∞ `*

*xN e− xdx* = *− e− xxN* +*∞ x*=*`*+ *N*

Z +*∞ `*

*xN−*1*e− xdx.*

Aplicˆand repetat integrarea prin p˘art¸i pentru calculul integralei improprii

Z +*∞ `*

*xN−*1*e−xdx* ˆın final se g˘ase¸ste

Z +*∞ `*

*xp−*1*e− xdx >* (*`N* + *N `N−*1 + *N*(*N −* 1)*`N−*2 + *· · ·* + *N*!)*e−*1 *→* +*∞*

cˆand *N →* +*∞.*ˆIn consecint¸˘a,

lim

*p→*+*∞*

Z +*∞ `*

*xp−*1*e− xdx* = +*∞,* (*∀*) *` >* 0*.*

Astfel, integrala improprie

Z 1 0

*xp−*1*e− xdx* este uniform convergent˘a ˆın ra

port cu parametrul *p* pe orice interval [*p*0*,* +*∞*) cu *p*0 *>* 0 arbitrar, dar fixat,

iar integrala imroprie

Z +*∞* 1

*xp−*1*e− xdx* este uniform convergent˘a pe orice in

terval (*−∞, P*0]*,* unde *P*0 este un num˘ar finit, arbitrar.

A¸sadar, ambele integrale sunt simultan uniform convergente ˆın raport cu parametrul *p* pe orice compact [*p*0*, P*0]*,* unde 0 *< p*0 *≤ P*0 *<* +*∞,* ceea ce dovede¸ste c˘a integrala improprie (2*.*120) este uniform convergent˘a ˆın raport cu parametrul *p* pe orice compact [*p*0*, P*0]*,* ceea ce trebuia de demonstrat.

Teorema

*tervalul* (0*,* +*∞*)*.*

*Funct¸ia* Γ *definit˘a ˆın* (2*.*120) *este o funct¸ie continu˘ a pe in*

Demonstrat¸ie. Funct¸ia de integrat, *f*(*x, p*) = *xp−*1*e− x,* este continu˘a pe mult¸imea (0*,* +*∞*)*×*(0*,* +*∞*)*,* iar conform Teoremei 2.6.1 integrala improprie (2*.*120) este uniform convergent˘a ˆın raport cu parametrul *p* pe orice interval finit [*p*0*, P*0]*,* unde 0 *< p*0 *≤ P*0 *<* +*∞.* Prin urmare, conform Teoremei

2.3.5, rezult˘a c˘a integrala Γ(*p*) = intervalul (0*,* +*∞*)*.*

Z +*∞* 0

*xp−*1*e− xdx* este funct¸ie continu˘a pe

Teorema *Funct¸ia* Γ *definit˘a ˆın* (2*.*120) *este infinit diferent¸iabil˘*

*a, de*

*andu–se prin integrala improprie depinzˆand de pa*

*rivata de ordin k exprimˆ*

*rametrul p*

Γ(*k*)(*p*) =

Z +*∞* 0

*xp−*1(ln *x*)*ke− xdx, k* = 1*,* 2*,* 3*, · · · .* (2.122)

Demonstrat¸ie. Derivarea formal˘a ˆın raport cu parametrul *p* ˆın (2*.*120) conduce la egalitatea

Γ*0*(*p*) =

Z +*∞* 0

*xp−*1(ln *x*)*e− xdx.* (2.123)

Egalitaea (2*.*123) poate fi justificat˘a ar˘atˆand c˘a integrala improprie (2*.*123) este uniform convergent˘a ˆın raport cu parametrul *p* pe orice interval finit [*p*0*, P*0]*,* unde 0 *< p*0 *≤ P*0 *<* +*∞,* iar derivata part¸ial˘a ˆın raport cu variabila *p* a funct¸iei de integrat *f*(*x, p*) = *xp−*1*e− x*este o funct¸ie continu˘a pe mult¸imea (0*,* +*∞*) *×* (0*,* +*∞*)*.* Faptul c˘a integrala improprie (2*.*123) este uniform con vergent˘a ˆın raport cu parametrul *p* pe orice compact [*p*0*, P*0] se demonstreaz˘a aplicˆand criteriul lui Weierstrass integralelor

Z 1 0

*xp−*1(ln *x*)*e− xdx* ¸si

Z +*∞* 1

*xp−*1(ln *x*)*e− xdx,*

funct¸iile *g*(*x*) din integralele

Z 1 0

*g*(*x*)*dx* ¸si

Z +*∞* 1

*g*(*x*)*dx* fiind date respectiv de

*g*(*x*) = *xP*0*−*1*|* ln *x|* ¸si *g*(*x*) = *xP*0*−*1*|* ln *x|e− x.*

Pentru obt¸inerea derivatei secunde a funct¸iei Γ(*p*) se aplic˘a rat¸ionamentul de mai sus funct¸iei Γ*0*(*p*) din (2*.*123)*.* Din aproape ˆın aproape se obt¸ine (2*.*122) ¸si teorema este demonstrat˘a.

S˘a stabilim acum o formul˘a de recurent¸˘a pentru funct¸ia Γ*.* Aplicˆand ˆın (2*.*120) formula integr˘arii prin p˘art¸i, obt¸inem

*p*Γ(*p*) = lim *x→*+*∞xpe−x −* lim *x→*0+0*xpe−x* +

Z +*∞* 0

*xpe−xdx.*

ˆIns˘a, aplicˆand o teorem˘a de tip Hospital, obt¸inem lim *x→*+*∞xpe− x* = lim *x→*0+0*xpe− x* = 0*,*

deci

*p*Γ(*p*) =

adic˘a

Z +*∞* 0

*xpe− xdx,*

Γ(*p* + 1) = *p*Γ(*p*)*.* (2.124)

Aplicˆand ˆın mod repetat aceast˘a relat¸ie de recurent¸˘a, obt¸inem Γ(*p* + *n*) = (*p* + *n −* 1)(*p* + *n −* 2)*· · ·*(*p* + 1)*p*Γ(*p*)*.* (2.125)

Din (2*.*125) rezult˘a c˘a este suficient s˘a cunoa¸stem valorile funct¸iei Γ pen tru orice *p* pozitiv ¸si subunitar pentru a obt¸ine valorile lui Γ pentru toate celelalte valori pozitive ale lui *p.* De exemplu

Γ 52= Γ 12+ 2= 12+ 2 *−* 1 12+ 2 *−* 2Γ 12=34Γ 12*.* (2.126) Pentru a finaliza relat¸ia (2*.*126) este necesar s˘a ¸stim valoarea lui Γ(*p*) pentru

*p* =12*,*

Γ 12=Z +*∞* 0

*x−*1*/*2*e− xdx.* (2.127)

Punˆand ˆın (2*.*127) *x* = *t*2¸si t¸inˆand cont de integrala Poisson, obt¸inem

Γ 12= 2 Z +*∞* 0

*e− t*2*dt* = 2

*√~~π~~*

2=*√~~π~~.* (2.128)

Din (2*.*126) ¸si (2*.*128) rezult˘a Γ 52=34*√~~π~~.* Luˆand, ˆın (2*.*125)*, p* = 1 ¸si t¸inˆand seama c˘a

Γ(1) =

Z +*∞* 0

*e− xdx* = 1*,* (2.129)

rezult˘a

Γ(*n* + 1) = *n*!*.* (2.130)

Cu alte cuvinte, funct¸ia Γ este, ˆıntrun anume sens, o generalizare a not¸iunii de factorial; putem spune c˘a prin intermediul funct¸iei Γ not¸iunea de factorial cap˘at˘a sens pentru orice num˘ar pozitiv.

Funct¸ia Γ este de cea mai mare important¸˘a ˆın analiz˘a. Ultima proprietate stabilit˘a face s˘a se ˆıntrevad˘a aceast˘a important¸˘a.

Teorema *Exist˘a o valoare p*0 *a lui p, ˆın intervalul* (1*,* 2)*, astfel ˆıncˆ*

*at*

*funct*

*¸ia* Γ(*p*) *este strict descresc˘atoare pe intervalul* (0*, p*0) *¸si strict cresc˘atoare pe* (*p*0*,* +*∞*)*.*

Demonstrat¸ie. Din expresia (2*.*119) a funct¸iei Γ(*p*) deducem c˘a, pentru *p >* 0*,* valorile sale sunt pozitive. De asemenea, din (2*.*124) avem

Γ(*p*) = Γ(*p* + 1)

*p*

pentru *p >* 0 ¸si deci Γ(*p*) *→* +*∞* pentru *p →* 0 + 0 deoarece Γ(*p* + 1) *→* Γ(1) = 1 pentru *p →* 0 + 0*.* Mai mult, se poate ar˘ata c˘a lim

*p→*+*∞*Γ(*p*) = +*∞.*

Observˆand c˘a din relat¸iile (2*.*128) ¸si (2*.*129) avem c˘a Γ(1) = Γ(2) = 1 ¸si folosind Teorema 2.6.1 ¸si Teorema 2.6.2, constat˘am c˘a pe intervalul [1*,* 2] funct¸ia Γ satisface ipotezele Teoremei lui Rolle. Conform acestei teo reme derivata Γ*0*(*p*) se anuleaz˘a ˆıntrun punct *p*0 *∈* (1*,* 2)*.* Deoarece Γ*00*(*p*) =

Z +*∞* 0

*xp−*1(ln *x*)2*e− xdx >* 0 pentru orice *p >* 0 rezult˘a c˘a derivata Γ*0*(*p*) este

o funct¸ie monoton cresc˘atoare pe intervalul (0*,* +*∞*)*.*ˆIn consecint¸˘a, derivata Γ*0*(*p*) nu are alte r˘ad˘acini, ˆın afar˘a de *p*0*,* ˆın intervalul (0*,* +*∞*)*.*ˆIn plus, Γ*0*(*p*) *<* 0 pentru *p < p*0 ¸si Γ*0*(*p*) *>* 0 pentru *p > p*0 deoarece Γ*0*(*p*) este o funct¸ie monoton cresc˘atoare. Deci, funct¸ia Γ(*p*) are numai o valoare extrem˘a pe intervalul 0 *< p <* +*∞,* ¸si anume un minim ˆın punctul *p* = *p*0*.*

2.6.3 Propriet˘at¸i ale funct¸iei Beta

Teorema *Integrala improprie de spet¸a a doua* (2*.*119) *este convergent˘a pentru p >* 0 *¸si q >* 0*.*

Demonstrat¸ie. Dac˘a *p ≥* 1 ¸si *q ≥* 1*,* funct¸ia de sub semnul integral˘a este continu˘a pe [0*,* 1]*,* deci integrala are sens chiar pe [0*,* 1] ceea ce arat˘a c˘a (2*.*119)

este o integral˘a definit˘a sau proprie. Dac˘a cel put¸in unul din numerele *p* ¸si *q* este mai mic decˆat 1*,* integrala (2*.*119) este una improprie de spet¸a a doua ¸si pentru studiul naturii acesteia vom descompune intervalul de integrare prin intermediul punctului 1*/*2*.*

Dac˘a *p <* 1*,* atunci din cele dou˘a integrale care rezult˘a dup˘a descom punerea intervalului [0*,* 1]*,* integrala

Z 1 2

0

(1 *− x*)*q−*1 *x*1*−pdx*

este improprie de spet¸a a doua cu limita inferioar˘a punct singular. Aplicˆand criteriul de comparat¸ieˆın *α,*ˆın varianta cu limit˘a, constat˘am c˘a pentru 1*−p <* 1*,* deci pentru *p >* 0*,* aceast˘a integral˘a este convergent˘a.

Dac˘a *q <* 1*,* atunci integrala

Z 1

1

2

*xp−*1

(1 *− x*)1*−qdx*

este improprie de spet¸a a doua cu limita superioar˘a punct singular. Aplicˆand acela¸si criteriu de comparat¸ie, deducem c˘a integrala este convergent˘a pentru 1 *− q <* 1*,* deci pentru *q >* 0*.*

Deci, pentru *p >* 0*, q >* 0*,* integrala (2*.*119) este convergent˘a. Prin urmare, putem spune c˘a funct¸ia *B*(*p, q*) este definit˘a ˆın port¸iunea de plan cu ambele coordonate strict pozitive.

Teorema *Funct¸ia Beta este simetric˘a ˆın variabilele sale p ¸si q, adic˘a B*(*p, q*) = *B*(*q, p*)*.* (2.131)

Demonstrat¸ie. ˆIn integrala (2*.*119) efectu˘am schimbarea de variabil˘a *x* = 1 *− t* ¸si constat˘am c˘a are loc (2*.*131)*.*

S˘a aplic˘am integralei (2*.*119) teorema de schimbare de variabil˘a pentru integrale pe interval necompact, punˆand

*x* = *ϕ*(*u*) = *u*

1 + *u.* (2.132)

Funct¸ia *ϕ* este derivabil˘a, cu derivat˘a continu˘a pe (0*,* +*∞*)*,* ¸si aplic˘a intervalul (0*,* +*∞*) pe intervalul (0*,* 1)*.* Din faptul c˘a derivata

*ϕ0*(*u*) = 1

(1 + *u*)2

este pozitiv˘a pe (0*,* +*∞*)*,* rezult˘a c˘a *ϕ* este funct¸ie strict cresc˘atoare pe (0*,* +*∞*)*,* deci toate condit¸iile pentru aplicarea schimb˘arii de variabil˘a definit˘a de (2*.*132) sunt ˆındeplinite. Avem

Z 1 0

*xp−*1(1 *− x*)*q−*1*dx* = =

Z +*∞*

0

Z +*∞* 0

*up−*1

(1 + *u*)*p−*1(1 + *u*)*q−*1(1 + *u*)2*du* =

*up−*1

(1 + *u*)*p*+*qdu,*

deci

*B*(*p, q*) =

Z +*∞* 0

*up−*1

(1 + *u*)*p*+*qdu.* (2.133)

Integrala din membrul doi al relat¸iei (2*.*133) o scriem ˆın forma

Z +*∞* 0

*up−*1

(1 + *u*)*p*+*qdu* =

Z 1 0

*up−*1

(1 + *u*)*p*+*qdu* +

Z +*∞* 1

*up−*1

(1 + *u*)*p*+*qdu,* (2.134)

iar ˆın cea de a doua integral˘a din membrul doi al acestei egalit˘at¸i efectu˘am schimbarea de variabil˘a *u* =1*y.* Obt¸inem

Z +*∞* 1

*up−*1

(1 + *u*)*p*+*qdu* =

Z 1 0

*yq−*1

(1 + *y*)*p*+*qdy.* (2.135)

Din (2*.*133)*,* (2*.*134) ¸si (2*.*135) deducem o nou˘a expresie pentru valorile func

t¸iei Beta, ¸si anume

*B*(*p, q*) =

Z 1 0

*up−*1 + *uq−*1 (1 + *u*)*p*+*qdu.*

Aceast˘a expresie arat˘a c˘a funct¸ia Beta este de fapt o integral˘a improprie cu punctul singular doar ˆın limita inferioar˘a.

Teorema *Dac˘a q >* 1*, atunci funct¸ia Beta satisface relat¸ia de recu*

*rent¸˘a*

*iar dac˘a p >* 1*, atunci*

*B*(*p, q*) = *q −* 1

*p* + *q −* 1*B*(*p, q −* 1)*,* (2.136)

*B*(*p, q*) = *p −* 1

*p* + *q −* 1*B*(*p −* 1*, q*)*.* (2.137)

Demonstrat¸ie. S˘a presupunem ˆıntˆai c˘a *q >* 1*.* Scriind c˘a *xp−*1 =*xp p*

*0*¸si

aplicˆand integralei (2*.*119) teorema de integrare prin p˘art¸i pentru integrale improprii, obt¸inem

*B*(*p, q*) = *q −* 1 *p*

Z 1 0

*xp*(1 *− x*)*q−*2*dx.* (2.138)

Utilizˆand ˆın (2*.*138) identitatea *xp* = *xp−*1 *− xp−*1(1 *− x*)*,* deducem *pB*(*p, q −* 1) *−q −* 1

*B*(*p, q*) = *q −* 1

de unde rezult˘a (2*.*136)*.*

*pB*(*p, q*)*,*

T¸ inˆand seama de (2*.*136 ¸si presupunˆand c˘a *p >* 1*,* ˆın baza relat¸iei de simetrie (2*.*131)*,* avem (2*.*137) ¸si teorema este demonstrat˘a.

Aplicˆand ˆın mod succesiv formula (2*.*136) pentru diferite valori naturale ale lui *q,* obt¸inem

*B*(*a, n*) = *n −* 1

*p* + *n −* 1*·n −* 2

*p* + *n −* 2*· · ·*1

*p* + 1*· B*(*p,* 1)*.*

ˆIns˘a *B*(*p,* 1) = Z 1 0

*xp−*1*dx* = 1*/p,* deci, t¸inˆand seama de (2*.*131)*,* obt¸inem

*B*(*p, n*) = *B*(*n, p*) = (*n −* 1)!

*p*(*p* + 1)(*p* + 2)*· · ·*(*p* + *n −* 1)*.* (2.139)

Luˆand ˆın rolul lui *p* un num˘ar natural *m,* din (2*.*139) rezult˘a, multiplicˆand num˘ar˘atorul ¸si numitorul cu (*m −* 1)!*,*

*B*(*m, n*) = *B*(*n, m*) = (*n −* 1)!(*m −* 1)!

(*m* + *n −* 1)! *.*

2.6.4 Relat¸ie ˆıntre funct¸iile Beta ¸si Gama

S˘a cercet˘am acum dac˘a ˆıntre funct¸iile Beta ¸si Gama exist˘a vreo relat¸ie. Pen tru aceasta vom avea nevoie de o alt˘a expresie a funct¸iei Γ ¸si ˆın acest sens vom aplica integralei (2*.*120) teorema de schimbare de variabil˘a, punˆand *x* = *ϕ*(*u*) = ln 1*u.* Aceast˘a funct¸ie aplic˘a intervalul (0*,* 1) pe intervalul (+*∞,* 0)*.*

De asemeni, *ϕ* este strict monoton˘a pe (0*,* 1)*,* derivabil˘a, cu derivat˘a continu˘a pe (0*,* 1) ¸si *ϕ0*(*u*) = *−*1*/u.* Avem

Z +*∞* 0

*xp−*1*e− xdx* = *−*

Z 0 1

ln 1*u**p−*1*e−* 1*u*1*udu* =

= *−*

Z 0 1

ln 1*u**p−*1*du* =Z 10ln 1*u**p−*1*du,*

de unde rezult˘a

Γ(*p*) =

Z 1 0

ln 1*u**p−*1*du.* (2.140)

Pe de alt˘a parte, funct¸ia ln 1*u*este limita unui ¸sir de funct¸ii reale (*fn*)*,* cu termenul general funct¸ia continu˘a *fn* = *n*1 *− u*1*n**,* definit˘a pe intervalul (0*,* +*∞*)*.* Deci,

lim *n→*+*∞fn*(*u*) = lim *n→*+*∞n*1 *− u*1*n*= ln 1*u.* (2.141)

S¸irul de funct¸ii (*fn*) este strict cresc˘ator deoarece funct¸ia real˘a de vari abila real˘a *x* definit˘a pe intervalul (0*,* +*∞*)*,* cu valorile date de 1 *− ex*

*x*este

cresc˘atoare, avˆand derivata pozitiv˘a. ˆIn plus, funct¸ia ln 1*u*este continu˘a ¸si prin urmare, conform Teoremei 2.3.1, convergent¸a ¸sirului de funct¸ii (*fn*) este uniform˘a. Putem deci aplica teorema de trecere la limit˘a sub semnul integral˘a ¸si obt¸inem, ˆın baza relat¸iilor (2*.*140) ¸si (2*.*141)*,*

Γ(*p*) = lim *n→*+*∞np−*1

Z 1 0

1 *− u*1*n**du.*

F˘acˆand ˆın ultima integral˘a schimbarea de variabil˘a *u* = *yn,* obt¸inem

Γ(*p*) = lim *n→*+*∞np*

Z 1 0

*yn−*1(1 *− y*)*p−*1*dy* = lim *n→*+*∞npB*(*n, p*)*.* (2.142)

T¸ inˆand seama de relat¸ia (2*.*139)*,* rezult˘a

Γ(*p*) = lim *n→*+*∞np*(*n −* 1)!

*p*(*p* + 1)(*p* + 2)*· · ·*(*p* + *n −* 1)*.* (2.143)

Relat¸iile (2*.*142) ¸si (2*.*143) stabilesc, ˆıntre funct¸iile *B* ¸si Γ*,* o leg˘atur˘a mijlocit˘a de o trecere la limit˘a.

S˘a stabilim o leg˘atur˘a mai simpl˘a ˆıntre aceste dou˘a funct¸ii. ˆIn acest scop, aplic˘am integralei (2*.*120) schimbarea de variabil˘a *x* = *ty,* unde *t ≥* 0*.*

Obt¸inem

Γ(*p*)

*tp*=

Z +*∞* 0

*yp−*1*e− tydy.* (2.144)

ˆInlocuind ˆın (2*.*144) pe *p* cu *p* + *q,* ˆın care *q >* 0*,* ¸si pe *t* cu 1 + *t,* g˘asim

Γ(*p* + *q*)

(1 + *t*)*p*+*q*=

Z +*∞* 0

*yp*+*q−*1*e−* (1+*t*)*ydy.* (2.145)

ˆInmult¸ind ambii membri ai acestei egalit˘at¸i cu *tp−*1¸si integrˆand, ˆın raport cu *t,* pe intervalul (0*,* +*∞*)*,* obt¸inem

Γ(*p* + *q*) *·*

Z +*∞* 0

*tp−*1

(1 + *t*)*p*+*qdt* =

(2.146)

=

Z +*∞* 0

*dt*

Z +*∞* 0

*tp−*1*yp*+*q−*1*e−* (1+*t*)*ydy.*

ˆIns˘a, ˆın baza relat¸iei (2*.*133)*,* integrala din primul membru al egalit˘at¸ii (2*.*146) este egal˘a cu *B*(*p, q*)*,* astfel c˘a putem scrie

Γ(*p* + *q*) *· B*(*p, q*) =

Z +*∞* 0

*dt*

Z +*∞* 0

*yp*+*q−*1*tp−*1*e−*(1+*t*)*ydy.* (2.147)

S˘a demonstr˘am acum c˘a este permis˘a schimbarea ordinii de integrare ˆın integrala din membrul al doilea al relat¸iei (2*.*147) pentru *p >* 1 ¸si *q >* 1*.* Pentru aceasta trebuie s˘a ar˘at˘am c˘a cele cinci ipoteze ale Teoremei 2.3.8 asupra schimb˘arii ordinii de integrare ˆıntro integral˘a iterat˘a sunt ˆındeplinite. ˆIntradev˘ar:

(a) funct¸ia

*f*(*y, t*) = *yp*+*q−*1*tp−*1*e−*(1+*t*)*y ≥* 0

este continu˘a pentru 0 *≤ y <* +*∞,* 0 *≤ t <* +*∞*;

(b) dac˘a *p >* 1 ¸si *q >* 1 integrala din membrul doi al relat¸iei (2*.*146) este convergent˘a;

(c) integrala

Z +*∞* 0

*f*(*y, t*)*dy* =

Z +*∞* 0

*tp−*1*yp*+*q−*1*e−* (1+*t*)*ydy*

este o funct¸ie continu˘a de variabila *t* pe intervalul (0*,* +*∞*) deoarece, ˆın baza relat¸iei (2*.*145)*,* avem

Z +*∞* 0

*yp*+*q−*1*e−* (1+*t*)*ydy* = Γ(*p* + *q*)*tp−*1 (1 + *t*)*p*+*q,*

iar Γ*,* dup˘a Teorema 2.6.1, este funct¸ie continu˘a; (d) integrala

Z +*∞* 0

*f*(*y, t*)*dt* =

Z +*∞* 0

*tp−*1*yp*+*q−*1*e−* (1+*t*)*ydt* (2.148)

este de asemeni o funct¸ie continu˘a pe intervalul (0*,* +*∞*) deoarece din (2*.*148) avem mai ˆıntˆai

Z +*∞* 0

*f*(*y, t*)*dt* = *yp*+*q−*1*e− y*

Z +*∞* 0

*tp−*1*e− tydt,*

iar apoi, dup˘a schimbarea de variabil˘a *u* = *ty,*

Z +*∞* 0

*f*(*y, t*)*dt* = *yq−*1*e− y·* Γ(*p*)*,* (2.149)

membrul doi al acestei relat¸ii fiind o funct¸ie continu˘a de *y* pe intervalul (0*,* +*∞*);

(e) integrala improprie de prima spet¸˘a

Z +*∞* 0

*dy*

Z +*∞* 0

*f*(*y, t*)*dt*

este convergent˘a deoarece, conform egalit˘at¸ii (2*.*149) ¸si definit¸iei (2*.*120) a funct¸iei Γ(*q*)*,* avem

Z +*∞* 0

*dy*

Z +*∞* 0

*f*(*y, t*)*dt* = Γ(*p*) *·* Γ(*q*)*,* (2.150)

iar membrul al doilea este num˘ar real. ˆIn consecint¸˘a, integrala iterat˘a

Z +*∞* 0

*dt*

Z +*∞* 0

*f*(*y, t*)*dy* =

Z +*∞* 0

*dt*

Z +*∞* 0

*yp*+*q−*1*tp−*1*e−*(1+*t*)*ydy* (2.151)

este convergent˘a ¸si egal˘a cu integrala din primul membru al egalit˘at¸ii (2*.*152)*.* A¸sadar, din (2*.*147)*,* (2*.*152) ¸si (2*.*151) deducem c˘a pentru *p >* 1 ¸si *q >* 1 are

loc identitatea

*B*(*p, q*) = Γ(*p*) *·* Γ(*q*)

Γ(*p* + *q*)*,* (2.152)

numit˘a *formula lui Jacobi* ce d˘a leg˘atura ˆıntre funct¸iile *B* ¸si Γ ale lui Euler. Pentru a extinde relat¸ia (2*.*150) la tot¸i *p >* 0 ¸si *q >* 0 scriem din nou aceast˘a relat¸ie pentru *p >* 1 ¸si *q >* 1 ¸si aplic˘am apoi formulele de recurent¸˘a (2*.*136) ¸si (2*.*137) membrului s˘au stˆang ¸si formula de recurent¸˘a (2*.*124) mem brului drept.

Dac˘a ˆın relat¸ia (2*.*133) consider˘am c˘a *q* = 1 *− p,* atunci ea devine

*B*(*p,* 1 *− p*) =

Z +*∞* 0

*up−*1

1 + *udu,* (2.153)

unde 0 *< p <* 1*.*ˆIn Exemplul 2.4.3 (vezi relat¸ia (2*.*101)) am ar˘atat c˘a integrala din (2*.*153) are valoarea *p*

sin *pπ,* prin urmare avem

*B*(*p,* 1 *− p*) = *p*

sin *pπ*pentru 0 *< p <* 1*.* (2.154)

Relat¸ia de recurent¸˘a (2*.*152)*,* ˆımpreun˘a cu (2*.*129) ¸si (2*.*152) conduc la relat¸ia important˘a

Γ(*p*) *·* Γ(1 *− p*) = *π*

sin *pπ*pentru 0 *< p <* 1*.* (2.155)